

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Quelques définitions

Définition 3

Suite : Une suite est une liste ordonnée de nombres portants des indices.

★ $(U_0; U_1; U_2; U_3; \dots; U_n; \dots)$ ou $(U_1; U_2; U_3; \dots; U_n; \dots)$

★ On note en général une suite de la forme suivante $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

★ En général, on parle de "**suite**" à la place de "**suite numérique**"

Définition 4

Terme :

★ Chaque élément de la suite est appelé "**terme**"

★ On les note : $U_0; U_1; U_2; U_3; \dots; U_n; \dots$

★ Les termes peuvent aller de 0 à l'infini.

Définition 5

Terme général : Si $U_n = f(n)$ alors le terme U_n représente le "**terme général**" de la suite.

Exemple 8

La liste $(1; 3; 5; 7; \dots)$ représente la suite des nombres impairs définie par le terme général $U_n = 2n + 1$, $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Définition 6

Suite explicite : Une suite définie par son terme général est une "**suite explicite**"

Définition 7

Suite réursive : Une suite définie par son premier terme et une relation entre les terme consécutifs est une "**suite réursive**"

Exemple 9

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = -3$, $U_{n+1} = \frac{3+U_n}{2}$. est une suite réursive.

On dit d'une telle suite qu'elle est récurrente.

2.2 Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une relation dépendante d'un entier naturel n .

★ $P(n_0)$ est vraie (c'est à dire au premier rang) et

★ $P(n)$ vraie $\longleftrightarrow P(n+1)$ vraie alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0 \quad P(n) \text{ est vraie}$$

Exemple 10

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{3+U_n}{2} \end{cases}$$

Montrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 3$

Solution 1

Démonstration

★ On a : $U_0 = -3 \Rightarrow U_0 < 3$ est vraie au premier rang.

★ Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 3$ et montrons que : $U_{n+1} \leq 3$.

$$\text{D'après les données, on a : } U_{n+1} = \frac{3+U_n}{2}$$

$$\text{or } U_n \leq 3 \Rightarrow 3+U_n \leq 6$$

$$\Rightarrow \frac{3+U_n}{2} \leq 3$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq 3$$

Conclusion

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 3$.

2.3 Convergence-Divergence

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et l un élément de $\mathbb{R}$.

On dit que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers l** si les valeurs des termes de la suite peuvent **s'approcher aussi près que l'on veut de l** en prenant **n suffisamment grand**.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \text{ on a } |U_n - l| \leq \varepsilon$$

NB : Toute suite convergente admet une limite.

Ainsi, si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

Remarque : Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Exemple 11

★ La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge vers 0 mais sa limite n'est pas évidente.

★ La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le terme général $U_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est convergente et converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

2.4 Relation d'ordre des suites convergentes

★ Théorème d'encadrement

Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites vérifiant la relation : $U_n \leq V_n \leq W_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l$

Exemple 12

Etudions la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$.

Solution 2

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq \cos(n) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$. La suite (U_n) converge vers 0.

2.5 Variation d'une suite

- ★ $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **constante** si et seulement si $U_{n+1} = U_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ★ $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **croissante** si et seulement si $U_{n+1} \geq U_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- ★ $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si et seulement si $U_{n+1} \leq U_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3

Pour étudier la variation d'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on étudie le **signe de la différence** $(U_{n+1} - U_n)$:

$$U_{n+1} - U_n = \begin{cases} 0 & \Rightarrow (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante} \\ \leq 0 & \Rightarrow (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \geq 0 & \Rightarrow (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \end{cases}$$

Exemple 13

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{3 + U_n}{2} \end{cases}$ On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 3$

Étudiez la variation de cette suite.

Solution 3

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{3 + U_n}{2} - U_n \\ &= \frac{3 + U_n - 2U_n}{2} \\ U_{n+1} - U_n &= \frac{3 - U_n}{2} \end{aligned}$$

Or il a été démontré à l'exemple 10 que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 3$

$$U_n \leq 3, \Rightarrow 3 - U_n \geq 0 \Rightarrow \frac{3 - U_n}{2} \geq 0.$$

$$\frac{3 - U_n}{2} \geq 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n \geq 0. \text{ D'où } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}$$

2.6 Suite majorée-Suite minorée

- $i_1)$ Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite majorée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$ (M est un majorant de (U_n))

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{3 + U_n}{2} \end{cases}$ Etudiée à l'exemple 10 et 13

i_2) Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite minorée si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$ (m est un minorant de (U_n))

2.7 Critère de convergence

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
Cas de la suite (U_n) de l'exemple 10 et 13.

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{3 + U_n}{2} \end{cases}$
Comme vu qu'elle est croissante et majorée alors Comme (U_n) est croissante et majorée alors elle est convergente.

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

2.8 Suites adjacentes

Deux suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si et seulement si l'une est croissante, et l'autre décroissante et la limite de leur différence est nulle $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - V_n) = 0$

Propriété 4

Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies respectivement par :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \text{ et } V_n = U_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Montrez que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et admettent la même limite.

Solution 4

Étudions leur sens de variation :

- $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\
 U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n+1 > 0 \Rightarrow (n+1)! > 0$ et donc $U_{n+1} - U_n > 0$. Ce qui permet de dire que (U_n) est une suite croissante.

On démontre également que (V_n) est décroissante puis :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n \cdot n!} \\
 \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) &= 0
 \end{aligned}$$

Comme (U_n) et (V_n) sont respectivement croissante et décroissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$ alors (U_n) et (V_n) sont adjacentes. Ce qui permet de conclure qu'elles sont convergentes et convergent vers la même limite.

2.9 Suites classiques

2.9.1 Suites arithmétiques

★ (U_n) est une suite arithmétique si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = r$ (r est appelé **raison de la suite**)

- Si $r > 0$, (U_n) est croissante,
- Si $r < 0$, (U_n) est décroissante,

★ Connaissant un terme quelconque U_p ,

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

★ Somme des termes d'une suite arithmétique :

$$S_n = \sum_{k=0}^n U_k = (n+1)(U_0 + U_n) \times \frac{1}{2}$$

Avec $(n+1)$ le nombre de termes.

2.9.2 Suites géométriques

★ (U_n) est une suite géométrique si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$
(q est appelé **raison de la suite**)

Dans une suite à termes positifs, on a :

- Si $q > 1$, (U_n) est croissante,
- Si $q < 1$, (U_n) est décroissante.

★ Connaissant un terme quelconque U_p ,

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

★ Somme des termes d'une suite géométrique :

$$S_n = \sum_{k=0}^n U_k = U_0 \times \frac{(1 - q^{(n+1)})}{1 - q}$$

Avec $(n+1)$ le nombre de termes.

U_0 le premier terme.

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

2.9.3 Suites arithmético-géométriques

★ Une suite (U_n) est dite arithmético géométrique si et seulement si, elle est de la forme :

$$U_{n+1} = aU_n + b, \quad a \in \mathbb{R}^* - \{1\}, b \in \mathbb{R}^*$$

et U_0 donné.

★ Le terme général est donné par :

$$U_n = a^n U_0 + b \left(\frac{1 - a^n}{1 - a} \right)$$

2.9.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

★ Ce sont des suites de la forme :

$$U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

et U_0, U_1 donnés.

★ Détermination du terme général U_n .

On associe l'équation caractéristique $r^2 = ar + b \Rightarrow r^2 - ar - b = 0$ dont le discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$

— Si $\Delta > 0$ alors on a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 .

$$U_n = Ar_1^n + Br_2^n, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

.

— Si $\Delta = 0$ alors on a une solution double r_0 .

$$U_n = (An + B)r_0^n, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

.

— Si $\Delta < 0$ alors on a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$.

$$U_n = u^n [A \cos(nv) + B \sin(nv)], \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Propriété 5

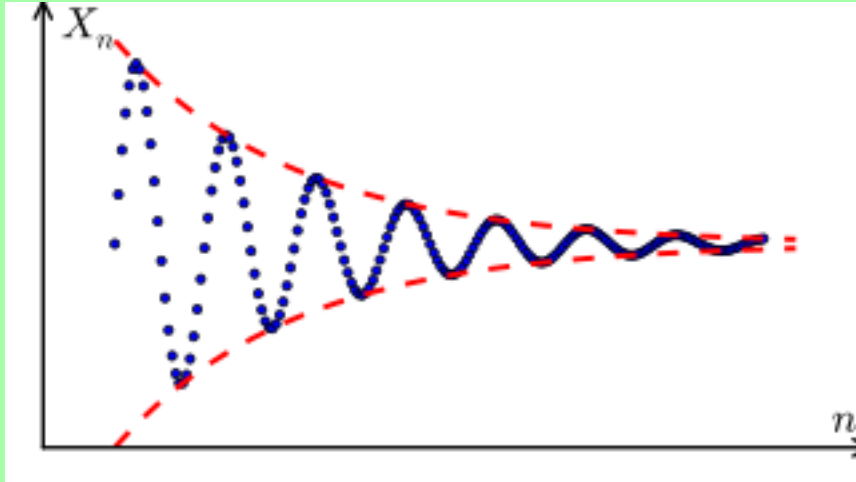
Les constantes A et B sont déterminées par les termes U_0 et U_1 .

2.9.5 Suite de CAUCHY

Une suite (U_n) est de **CAUCHY** si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall p > N_0 \text{ et } q > N_0 \text{ on a } |U_p - U_q| \leq \varepsilon$

Exemple de représentation graphique



Propriété 6

Une suite est convergente si et seulement si elle est de **CAUCHY**

2.10 Limite des suites convergentes de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction continue telle que $f(I) \subset I$

Soit (U_n) une suite convergente telle que $U_{n+1} = f(U_n)$.

La limite $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ vérifie l'équation $f(l) = l$.